Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

(a) Berechne die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle $x_p = 3$

(b) Zeige durch Rechnung, dass die Punkte $P(2/7)$ und $Q(-1/4)$ auf dem Graphen von f liegen. Berechne die Gleichung der Sekante durch die Punkte P und Q.

(c) Zur Sekante existiert eine parallele Tangente an den Graphen. Berechne den Berührpunkt dieser Tangente an den Graphen.

(d) Berechne die Normale zur Tangente durch den Berührpunkt aus Aufgabenteil (c).

Lösung:

(a)

Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$

Steigung der Tangente an der Stelle $x_p = 3$ ist der Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x_p = 3$.

$f'(x) = 4x - 1 \Rightarrow f'(x_p) = f'(3) = 11 \Rightarrow m = 11$

y-Achsenabschnitt b wird durch einsetzen und auflösen der Geradengleichung bestimmt.

Aus $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 16$ und $m = 11 \Rightarrow$

$$16 = 11 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -17$$

und somit ist die Geradengleichung der Tangente an den Graphen f an der Stelle $x_p = 3$

$$y = 11x - 17 \quad .$$

(b)

$$f(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7 \Rightarrow P(2/7) \in f$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 1 = 4 \Rightarrow Q(-1/4) \in f$$

Berechnung der Sekante durch P und Q als Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten $\Rightarrow$

allgemeine Geradengleichung $y = mx + b$ muss von den Punkten P und Q erfüllt werden:

$7 = 2m + b$ und $4 = -m + b$

Auflösen der zweiten Gleichung nach b liefert $b = m + 4$, dieses in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt folgende Gleichung:

$$7 = 2m + \underbrace{(m + 4)}_{=b} \Leftrightarrow 7 = 3m + 4 \Leftrightarrow m = 1$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in die Gleichung $7 = 2m + b$ liefert $b = 5$ und somit lautet die gesuchte Sekantengleichung:

$$y = x + 5$$

(c)

Die parallele Tangente muss die selbe Steigung $m = 1$ wie die errechnete Sekante aus (b) haben.

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 4x - 1 \Rightarrow 1 = 4x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Somit hat der Graph von f an der Stelle $\frac{1}{2}$ eine Tangente mit der Steigung von $m_t = 1$. Der Berührpunkt T hat die Koordinaten $x_T = \frac{1}{2}$ und $y_T = f(x_T) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1$ und lautet

$$T\left(\frac{1}{2}/1\right).$$

(d)
Die Steigung der Normalen zum Punkt T an den Graphen f errechnet sich wie folgt aus der Steigung der Tangenten (Normale und Tangente stehen orthogonal aufeinander):

$$m_t \cdot m_n = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot m_n = -1 \Leftrightarrow m_n = -1.$$

Nun muss die Normale folgender Gleichung genügen und den Punkt T beinhalten

$$\Rightarrow y_T = m_n x_T + b_n \Rightarrow 1 = -1 \cdot \frac{1}{2} + b_n \Rightarrow b_n = \frac{3}{2}.$$

Hieraus folgt die gesuchte Normalengleichung:

$$y = -x + \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 2:

Die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und geht durch den Punkt $Q(3/-7)$. Die Tangente an den Berührpunkt Q hat die Steigung -2.
Wie lautet die Funktion?

Lösung:
Die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat 3 Unbekannte, somit sind 3 Gleichungen nötig diese Unbekannten zu finden.

(i) aus der Information „schneidet die y-Achse bei $y = 2$" folgt:

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$$

(ii) aus der Information „geht durch den Punkt $Q(3/-7)$" folgt:

$$f(3) = -7 \Rightarrow -7 = 3^2 a + 3b + c \overset{c=2}{\Rightarrow} -9 = 9a + 3b$$

(iii) aus der Information „Die Tangente an den Berührpunkt Q hat die Steigung -2." folgt:

$$f'(3) = -2 \text{ mit } f'(x) = 2ax + b \text{ folgt } -2 = 2 \cdot a \cdot 3 + b \Rightarrow -2 = 6a + b$$

Nun sind nur noch die Gleichungen $-9 = 9a + 3b$ und $-2 = 6a + b$ zu lösen und man erhält a und b:

löst man die Gleichung $-2 = 6a + b$ nach b auf erhält man $b = -6a - 2$, dieses nun in die Gleichung $-9 = 9a + 3b$ eingesetzt, liefert:

$$-9 = 9a + 3(\underbrace{-6a - 2}_{=b}) \Leftrightarrow -9 = 9a - 18a - 6 \Leftrightarrow -3 = -9a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Dieses Ergebnis kann man in $b = -6a - 2$ einsetzen und man erhält

$$b = -6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow b = -4 .$$

Und so erhält man die gesuchte Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3} x^2 - 4x + 2 \ .$$

Aufgabe 3:

Mit einem Zaun von der Länge 100m soll ein rechteckiger Hühnerhof mit möglichst großem Flächeninhalt eingezäunt werden. Bestimme die Länge und die Breite des Hofs und gib den Flächeninhalt an.

Lösung:

Extremalbedingung: $A_{max} = a \cdot b$

Nebenbedingung: $2 \cdot (a + b) = 100 \Rightarrow 2a = 100 - 2b \Rightarrow a = 50 - b$

Zielfunktion: $A(b) = \underbrace{(50 - b)}_{=a} \cdot b = -b^2 + 50b$

Die Suche nach dem Maximum der Funktion $A(b)$ ergibt:

$$a = b = 25m \Rightarrow A_{max} = 625m^2$$

Aufgabe 4:

Berechne folgende Integrale:

(a) $\int_1^5 \left(\frac{1}{2} x + 2 \right) dx$ (b) $\int_0^1 (2x^3 + x^2) dx$ (c) $\int_0^p (2 \cdot \sin x) dx$

Lösung:

(a) $\int_1^5 \left(\frac{1}{2} x + 2 \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^5 = 14$

(b) $\int_0^1 (2x^3 + x^2) dx = \left[\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{6}$

(c) $\int_0^p (2 \cdot \sin x) dx = [-2 \cdot \cos x]_0^p = 4$

Aufgabe 5:

Bestimme zunächst die Nullstellen von f und skizziere den Graphen. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

Lösung:

Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 -f(x)\,dx = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = 3\frac{1}{12}$$