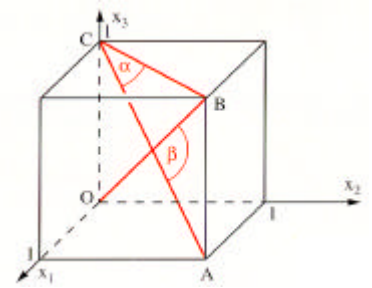


Alle Ergebnisse ohne Garantie!!!

Aufgabe 1:

- (a) Bestimme anhand der nebenstehenden Zeichnung die Größe des Winkels α zwischen den Flächendiagonalen CB und der Raumdiagonalen CA .
- (b) Wie groß ist der Winkel β zwischen den Raumdiagonalen CA und OB ?

**Lösung:**

(a) $\alpha \approx 35,3^\circ$

(b) $\beta \approx 70,5^\circ$

Aufgabe 2:

Bestimme alle Vektoren, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3:

Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E an.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:

z.B.: $4x_1 + 5x_2 - x_3 = 1$

Aufgabe 4:

Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, für die gilt: Die Ebene geht durch den Punkt P und hat den Normalenvektor $\vec{n}$.

$$P(-1|2|1); \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

z.B. $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0$

Aufgabe 5:

Bestimme für die Ebene E eine Gleichung in Normalenform.

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

Lösung:

$$\text{z.B. } E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 6:

Die Ebenen E_1 und E_2 sollen zueinander orthogonal sein. Bestimme den Parameter a in der Gleichung von E_2 so, dass dies der Fall ist.

$$E_1: 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 7$$

$$E_2: 3x_1 + x_2 + ax_3 = 10$$

Lösung:

$$a = -1$$

Aufgabe 7:

Gegeben sind zwei Punkte A und B und eine Ebene E . Bestimme eine Gleichung der Ebene F , für die gilt: F geht durch die Punkte A und B und ist zur Ebene E orthogonal.

$$A(2|-1|7); B(0|3|9); E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

Lösung:

$$\text{z.B. } E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 8:

Eine Gerade g durch $A(2|3|-1)$ ist orthogonal zur Ebene E . Bestimme eine Gleichung von g .

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{z.B. } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g . Bestimme den Punkt Q auf g so, dass die Gerade h durch P und Q orthogonal zu g ist. Gib auch eine Gleichung für h an.

$$P(-4|0|3); \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Q\left(-\frac{1}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{16}{3}\right); \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

Berechne die Abstände der Punkte A, B und C von der Ebene E .

$$(a) \quad A(2|-1|2); B(2|10|-6); C(4|6|8); \quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(b) \quad A(1|1|-2); B(5|1|0); C(1|3|3); \quad E: 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 = 0$$

$$(c) \quad A(4|-1|-1); B(-1|2|-4); C(7|3|4); \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$(a) \quad d_A = 0; \quad d_B = 10; \quad d_C = \frac{4}{3}$$

$$(b) \quad d_A = 2; \quad d_B = 0; \quad d_C = \frac{1}{3}$$

$$(c) \quad d_A = 3; \quad d_B = 0; \quad d_C = 10$$

Aufgabe 11:

Berechne die Abstände der Punkte A, B und C von der Ebene durch die Punkte P, Q und R .

$$A(4|4|-4); B(5|-8|-1); C(0|0|10); P(1|2|6); Q(3|3|4); R(4|5|6)$$

Lösung:

$$\text{Ebengleichung: } 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4; \quad d_A = \frac{8}{3}; \quad d_B = 7; \quad d_C = 2$$

Aufgabe 12:

Gegeben sind die Ebene $E : 3x_2 + 4x_3 = 0$ und der Punkt $P(3|-1|7)$.

- Stelle eine Gleichung der Geraden g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P geht.
- Bestimme den Lotfußpunkt, d.h. den Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Ebene E . Berechne den Abstand der Punkte P und Q .
- Berechne direkt den Abstand von P zur Ebene E . Kontrolliere damit das Ergebnis von 12 (b).

Lösung:

- z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $Q(3|-4|3); 5$
- 5

Aufgabe 13:

Die Menge aller Punkte, die zu einer Ebene E einen festen Abstand haben, bilden zwei zu E parallele Ebenen F_1 und F_2 . Bestimme die Gleichungen der Ebenen F_1 und F_2 so, dass F_1 und F_2 von $E : 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 8$ den Abstand 2 haben.

Hinweis: Wähle einen günstigen Punkt, z.B. einen Punkt auf der x_1 -Achse. Bestimme dann seine Koordinaten so, dass sein Abstand von der Ebene E gerade 2 beträgt (zwei Lösungen). Die gesuchten Ebenen gehen durch diese Punkte und sind parallel zu E .

Lösung:

Punkte auf der x_1 -Achse: $P_1(8,5|0|0)$; $P_2(-4,5|0|0)$

Ebenengleichungen: $F_1 : 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 34$; $F_2 : 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 = -18$

Aufgabe 14:

Berechne den Abstand des Punkte R von der Geraden g .

$$R(-2|-6|1); g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

11

Aufgabe 15:Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

$$A(2|1|0); B(1|1|0); C(5|1|1)$$

Lösung:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 16:

Berechne den Abstand zwischen den Geraden mit den Gleichungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$17$$

Aufgabe 17:Bestimme die Zahlen r und s so, dass $\vec{a} - r\vec{b} - s\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und zu $\vec{c}$ ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$r = 2; s = 2$$

Aufgabe 18:

Berechne das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten

$$A(-8|5|-2); B(10|-7|2); C(7|6|-6); D(3|5|9)$$

Lösung:

$$V_P = \frac{1331}{3}$$