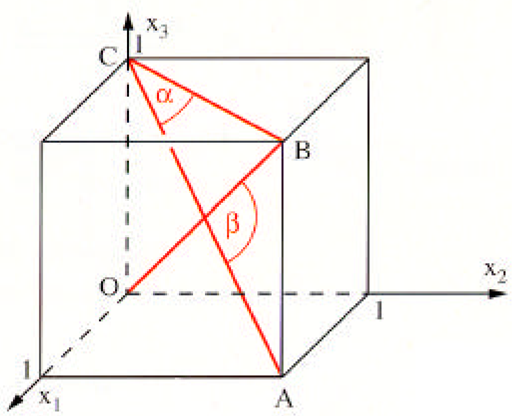
Hinweis zur Bearbeitung der Aufgaben:

- Aufgabe 1-9 sind Basisaufgaben (Überprüfung des Grundwissens)
- Aufgabe 10-16 sind komplexe Aufgaben, welche mehrere Methoden kombinieren.
- Aufgaben 17 & 18 sind Aufgaben, welche bestimmtes Wissen abfragen.
- Der Umfang der Aufgaben entspricht <u>nicht</u> der Klausur :)
- Die Aufgaben prüfen alle Themengebiete der Klausur ab, jedoch werden die Klausraufgaben deutlich anders „aussehen“. ;)



Aufgabe 1:

(a) Bestimme anhand der nebenstehenden Zeichnung die Größe des Winkels a zwischen den Flächendiagonalen CB und der Raumdiagonalen CA.

(b) Wie groß ist der Winkel b zwischen den Raumdiagonalen CA und OB?

Aufgabe 2:

Bestimme <u>alle</u> Vektoren, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E an.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 4:

Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, für die gilt: *Die Ebene geht durch den Punkt P und hat den Normalenvektor* $\vec{n}$.

$$P(-1|2|1);\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Bestimme für die Ebene E eine Gleichung in Normalenform.

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

Aufgabe 6:

Die Ebenen E_1 und E_2 sollen zueinander orthogonal sein. Bestimme den Parameter a in der Gleichung von E_2 so, dass dies der Fall ist.

$$E_1: 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 7$$
$$E_2: 3x_1 + x_2 + ax_3 = 10$$

Aufgabe 7:
Gegeben sind zwei Punkte A und B und eine Ebene E. Bestimme eine Gleichung der Ebene F, für die gilt: F geht durch dir Punkte A und B und ist zur Ebene E orthogonal.

$$A(2|-1|7);\ B(0|3|9);\ E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

Aufgabe 8:
Eine Gerade g durch $A(2|3|-1)$ ist orthogonal zur Ebene E. Bestimme eine Gleichung von g.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:
Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g .Bestimme den Punkt Q auf g so, dass die Gerade h durch P und Q orthogonal zu g ist. Gib auch eine Gleichung für h an.

$$P(-4|0|3);\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:
Berechne die Abstände der Punkte A, B und C von der Ebene E.

(a) $A(2|-1|2);\ B(2|10|-6);\ C(4|6|8);\ E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

(b) $A(1|1|-2);\ B(5|1|0);\ C(1|3|3);\ E: 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 = 0$

(c) $A(4|-1|-1);\ B(-1|2|-4);\ C(7|3|4);\ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11:
Berechne die Abstände der Punkte A, B und C von der Ebene durch die Punkte P, Q und R.

$$A(4|4|-4);\ B(5|-8|-1);\ C(0|0|10);\ P(1|2|6);\ Q(3|3|4);\ R(4|5|6)$$

Aufgabe 12:
Gegeben sind die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 0$ und der Punkt $P(3|-1|7)$.

(a) Stelle eine Gleichung der Geraden g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P geht.
(b) Bestimme den Lotfußpunkt, d.h. den Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Ebene E. Berechne den Abstand der Punkte P und Q.
(c) Berechne direkt den Abstand von P zur Ebene E. Kontrolliere damit das Ergebnis von 12 (b).

Aufgabe 13:
Die Menge aller Punkte , die zu einer Ebene E einen festen Abstand haben, bilden zwei zu E parallele Ebenen F_1 und F_2. Bestimme die Gleichungen der Ebenen F_1 und F_2 so, dass F_1 und F_2 von $E: 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 8$ den Abstand 2 haben.

<u>*Hinweis:*</u> *Wähle einen günstigen Punkt, z.B. einen Punkt auf der x_1-Achse. Bestimme dann seine Koordinaten so, dass sein Abstand von der Ebene E gerade 2 beträgt (zwei Lösungen).Die gesuchten Ebenen gehen durch diese Punkte und sind parallel zu E.*

Aufgabe 14:
Berechne den Abstand des Punkte R von der Geraden g.

$$R(-2|-6|1);\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15:
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$A(2|1|0);\ B(1|1|0);\ C(5|1|1)$$

Aufgabe 16:
Berechne den Abstand zwischen den Geraden mit den Gleichungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17:
Bestimme die Zahlen r und s so, dass $\vec{a} - r\vec{b} - s\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und zu $\vec{c}$ ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18:
Berechne das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten

$$A(-8|5|-2);\ B(10|-7|2);\ C(7|6|-6);\ D(3|5|9)$$