

Aufgabe 1:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades habe die Nullstellen -1 ; 1 ; 3 . Ihr Schaubild gehe durch $P(2|-6)$. Bestimme die Extremstellen. Skizziere den Graphen der Funktion.

Lösung:

allgemeine Form einer Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Informationen aus den Angaben:

aus den Nullstellen folgt:

$$(i) \quad f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = -a + b - c + d$$

$$(ii) \quad f(1) = 0 \Rightarrow 0 = a + b + c + d$$

$$(iii) \quad f(3) = 0 \Rightarrow 0 = 27a + 9b + 3c + d$$

aus $P(2|-6)$ folgt:

$$(iv) \quad f(2) = -6 \Rightarrow -6 = 8a + 4b + 2c + d$$

Durch geschicktes lösen des Gleichungssystems (z.B. Gaußverfahren oder Einsetzungsverfahren) ergibt sich:

$a = 2$; $b = -6$; $c = -2$; $d = 6$ und man erhält folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

Extremwertbestimmung:

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 2$$

$$f''(x) = 12x - 12$$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 6x^2 - 12x - 2$

mit Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen folgt:

$$x_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad x_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

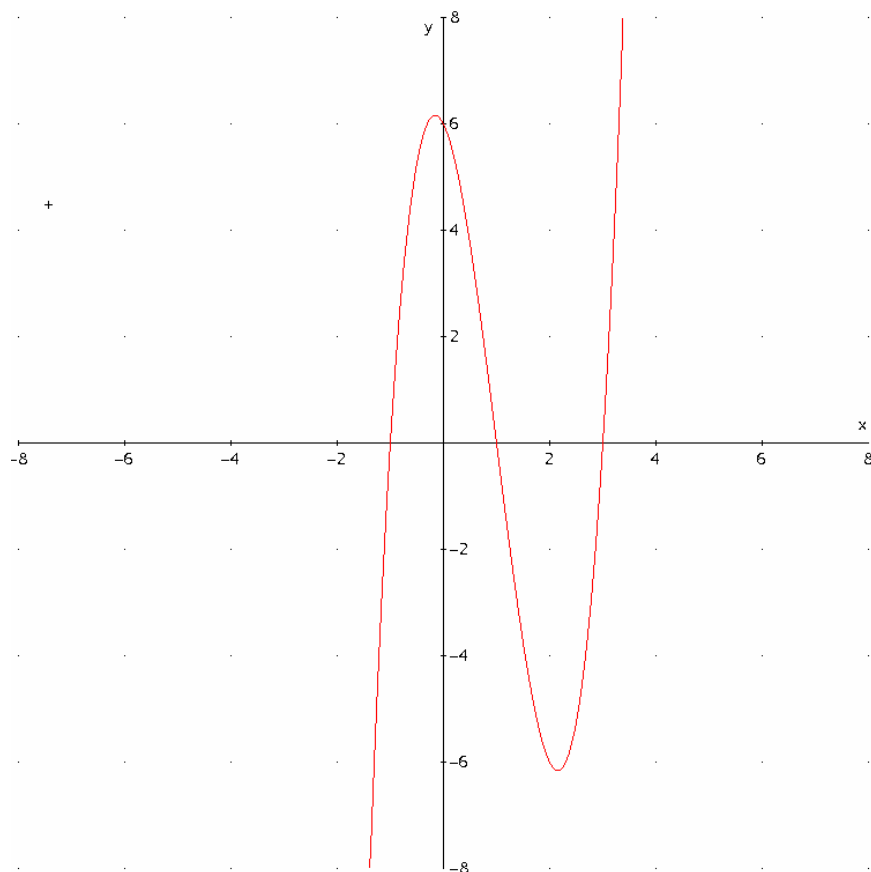
hinreichende Bedingung:

$$f''(x_1) = -8\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum an der Stelle } x_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow H\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \mid \frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$f''(x_2) = 8\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum an der Stelle } x_2 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow T\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mid -\frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$$



Aufgabe 2:

Von einer Funktion 2. Grades ist bekannt, dass sie die y -Achse bei 2 schneidet und durch den Punkt $Q(3|-7)$ geht. Die Tangente an den Berührungspunkt Q hat die Steigung -2 . Gib die Funktionsgleichung.

[8 Punkte]

Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

aus: y -Achse bei 2: $\Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$ [2 Rohpunkte]

aus: $Q(3|-7) \Rightarrow f(3) = -7 \Rightarrow -7 = 9a + 3b + c$ (i) [1 Rohpunkt]

aus: $m_t = -2$ in $Q \Rightarrow f'(3) = -2$ mit $f'(x) = 2ax + b$ [1 Rohpunkt]
 $\Rightarrow -2 = 6a + b$ (ii) [1 Rohpunkt]

c in (i) $\Rightarrow 9a + 3b + 2 = -7 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}b - 1$ (iii)

(iii) in (ii) $\Rightarrow 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}b - 1\right) + b = -2 \Rightarrow b = -4$ [1 Rohpunkt]

b in (iii) $\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \cdot (-4) - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ [1 Rohpunkt]

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 2$ [1 Rohpunkt]

Aufgabe 3:

Die Funktion $f_t(x) = x(x-t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Funktionenschar.

- Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 des Graphen von f_t mit der x -Achse. Gib die Gleichungen der Tangenten in S_1 und S_2 an.
- Berechne den Wert t , für welchen die Tangenten orthogonal zueinander sind.
- Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt P (für allgemeines t) der Tangenten in S_1 und S_2 .
- Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks S_1PS_2 in Abhängigkeit von t .

[13 Punkte]

Lösung:

$$f_t(x) = x(x-t) = x^2 - tx; \quad t \in \mathbb{R}$$

(a)

Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x(x-t) \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = t \quad [1 \text{ Rohpunkt}]$$

$$\Rightarrow S_1(x_1 | 0) = S_1(0 | 0) \quad \text{und} \quad S_2(x_2 | 0) = S_2(t | 0) \quad [1 \text{ Rohpunkt}]$$

Tangenten

t_1 in S_1

$$f'(x) = 2x - t \quad [1 \text{ Rohpunkt}]$$

$$\text{Steigung der Tangenten } m_{t_1} = f'(x_1) = f'(0) = -t$$

$$\text{mit } y_1 = m_{t_1} x_1 + n_1 \Rightarrow 0 = -t \cdot 0 + n_1 \Rightarrow n_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 : y = -tx \quad [1,5 \text{ Rohpunkte}]$$

t_2 in S_2

$$\text{Steigung der Tangenten } m_{t_2} = f'(x_2) = f'(t) = 2 \cdot t - t = t$$

$$\text{mit } y_2 = m_{t_2} x_2 + n_2 \Rightarrow 0 = t \cdot t + n_2 \Rightarrow n_2 = -t^2$$

$$\Rightarrow t_2 : y = tx - t^2 \quad [1,5 \text{ Rohpunkte}]$$

(b)

Tangenten sind orthogonal, wenn gilt:

$$m_{t_1} \cdot m_{t_2} = -1 \Rightarrow -t \cdot t = -1 \Rightarrow -t^2 = -1 \Rightarrow t_1 = 1 \text{ und } t_2 = -1 \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$

(c)

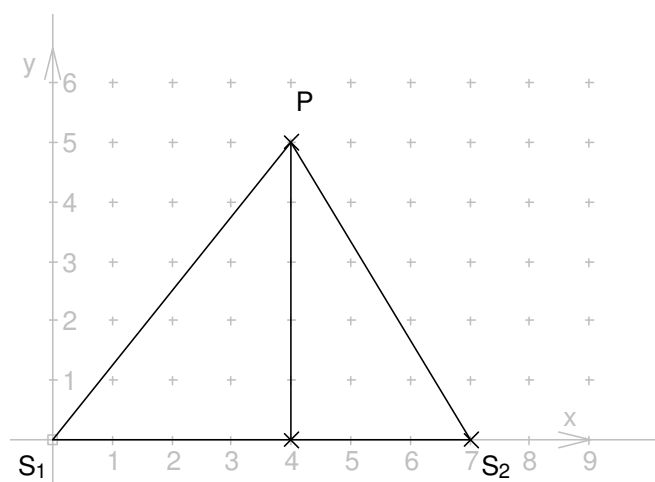
$$\text{Schnittpunkt } t_1 \cap t_2 = P \Rightarrow \underbrace{-tx}_{t_1} = \underbrace{tx - t^2}_{t_2} \Rightarrow t^2 = 2tx \Rightarrow x = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2} \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$

$$\Rightarrow x \text{ in } t_1: y = -t \cdot \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}t^2 \quad [1 \text{ Rohpunkt}]$$

$$P\left(\frac{t}{2} \mid -\frac{1}{2}t^2\right)$$

(d)

Skizze:



mit den Koordinaten der Punkte P und S_2 folgt:

$$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{|t| \cdot \left| \frac{1}{2}t^2 \right|}{2} = \frac{|t^3|}{4} \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$

Aufgabe 4

Die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und geht durch den Punkt $Q(3|-7)$. Die Tangente an den Berührungspunkt Q hat die Steigung -2.

Wie lautet die Funktion?

[10 Punkte]

Lösung:

Die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat 3 Unbekannte, somit sind 3 Gleichungen nötig diese Unbekannten zu finden.

(i) aus der Information „schneidet die y-Achse bei $y = 2$ “ folgt:

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$$

(ii) aus der Information „geht durch den Punkt $Q(3|-7)$ “ folgt:

$$f(3) = -7 \Rightarrow -7 = 3^2 a + 3b + \overset{c=2}{c} \Rightarrow -9 = 9a + 3b$$

(iii) aus der Information „Die Tangente an den Berührungspunkt Q hat die Steigung -2.“ folgt:

$$f'(3) = -2 \text{ mit } f'(x) = 2ax + b \text{ folgt } -2 = 2 \cdot a \cdot 3 + b \Rightarrow -2 = 6a + b$$

Nun sind nur noch die Gleichungen $-9 = 9a + 3b$ und $-2 = 6a + b$ zu lösen und man erhält a und b :

löst man die Gleichung $-2 = 6a + b$ nach b auf erhält man $b = -6a - 2$, dieses nun in die Gleichung $-9 = 9a + 3b$ eingesetzt, liefert:

$$-9 = 9a + 3(\underbrace{-6a - 2}_{=b}) \Leftrightarrow -9 = 9a - 18a - 6 \Leftrightarrow -3 = -9a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Dieses Ergebnis kann man in $b = -6a - 2$ einsetzen und man erhält

$$b = -6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow b = -4.$$

Und so erhält man die gesuchte Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 2.$$

Aufgabe 5:

Welche Beziehungen müssen bei einer Funktion f mit $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ die Koeffizienten erfüllen, damit das Schaubild von f

- (a) zwei,
- (b) genau eine *oder*
- (c) keine *waagrechte Tangenten hat?*

[8 Punkte]

Lösung:

aus waagrecht Tangente folgt $f'(x) = 0$

[1 Rohpunkt]

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \text{ waagrechte Tangente: } 0 = 3x^2 + 2bx + c$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12c}}{6} \quad [1 \text{ Rohpunkt}]$$

(a)

Zwei waagrechte Tangenten existieren, wenn die Gleichung $f'(x) = 0$ zwei Lösungen besitzt.

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 12c > 0 \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$

(b)

Eine waagrechte Tangente existiert, wenn die Gleichung $f'(x) = 0$ eine Lösung besitzt.

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 12c = 0 \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$

(c)

Keine waagrechte Tangente existiert, wenn die Gleichung $f'(x) = 0$ keine Lösung besitzt.

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 12c < 0 \quad [2 \text{ Rohpunkte}]$$