

Aufgabe 1:

Ein 25m langes, 15m breites und 2m tiefes Schwimmbecken wird gefüllt. Pro Stunde fließen $60m^3$ Wasser zu.

- (a) Gib die Funktion Fülldauer (in h) $\mapsto$ Wassertiefe (in m) an.
- (b) Welche Wassertiefe ist nach 3 Stunden erreicht?
- (c) Wie lange dauert es, bis das Becken bis 20cm unter den oberen Rand gefüllt ist.

Lösung:

$60m^3$ Wasser stehen in dem Becken $h = \frac{60}{25 \cdot 15} m = 0,16m$ hoch.

- (a) $t \mapsto 0,16t$
- (b) 0,48
- (c) $0,16t = 1,8$ gibt 11,25h

Aufgabe 2:

- (a) Zeige, dass die folgenden Gleichungen nicht bei allen linearen Funktionen f erfüllt sind:
 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ und $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
- (b) Für welche linearen Funktionen sind diese Gleichungen erfüllt.

Lösung:

- (a) Es sei $f(x) = mx + c$. Aus $f(a+b) = f(a) + f(b)$ erhält man die Bedingung
 $m(a+b) + c = ma + c + mb + c \Leftrightarrow m(a+b) + c = m(a+b) + 2c \Rightarrow c = 0$.
Aus $f(ka) = k \cdot f(a) \Rightarrow c = ka \Leftrightarrow c \cdot 1(-k) = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $k = 1$.
- (b) Nur Proportionalitäten sind die Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 3:

Ein Sparguthaben von 5000€ liegt 10 Jahre auf der Bank, ohne dass jemals Geld abgehoben wird. Es verzinst sich mit 6% jährlich.

- (a) Wie groß ist der Wachstumsfaktor, mit dem das Guthaben anwächst?
- (b) Wie hoch ist das Guthaben 6 Jahren und wie hoch nach x Jahren?

Lösung:

- (a) 1,06
- (b) $K_x = 5000 \cdot 1,06^x$

Aufgabe 4:

Gib den Funktionsterm von $\overline{f}$ an. Beachte die Definitionsmenge.

- (a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
- (b) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$; $x \leq 0$
- (c) $f(x) = \sqrt{1-x}$

Lösung:

(a) $\bar{f}(x) = -2x + 2$

(b) $\bar{f}(x) = \sqrt{2x-2}; x \geq 1$

(c) $\bar{f}(x) = 1 - x^2; x \geq 2$

Aufgabe 5:

(a) Bei manchen Folgen (a_n) ist es zweckmäßig, statt der Differenz $a_{n+1} - a_n$ den Quotienten $a_{n+1} : a_n$ zu betrachten. Wie zeigt sich an ihm, dass die Folge monoton ist?

(b) Untersuche mittels des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ die Folgen $\left(\frac{n+2}{n}\right)$, $(\sqrt{n-1})$, $\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$ und $\left(2^{\frac{1}{n}}\right)$ auf Monotonie.

Lösung:

(a)

$a_n > 0$

(a_n) monoton zunehmend genau dann, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

(a_n) monoton abnehmend genau dann, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

$a_n < 0$

(a_n) monoton zunehmend genau dann, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

(a_n) monoton abnehmend genau dann, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

(b)

$\left(\frac{n+2}{n}\right)$ monoton fallend

$(\sqrt{n-1})$ monoton zunehmend

$\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)$ monoton abnehmend

$\left(2^{\frac{1}{n}}\right)$ monoton zunehmend

Aufgabe 6:

Untersuche, ob die Folge sowohl monoton als auch beschränkt ist.

(a) $\left(-\frac{1}{2n}\right)$

- (b) $\left(\frac{n^2+1}{100n}\right)$
 (c) $(n^2 \cdot 2^{-n})$
 (d) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

Lösung:

- (a) monoton zunehmend, $-\frac{1}{2} \leq (a_n) \leq 0$
 (b) monoton zunehmend, nach oben unbeschränkt, $\frac{1}{50} \leq (a_n)$
 (c) monoton abnehmend, $0 \leq (a_n) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
 (d) monoton abnehmend, $0 \leq (a_n) \leq 0,6$

Aufgabe 7:

Ist die Folge nach oben oder unten beschränkt? Wie ist das Monotonieverhalten?

- (a) $\left(\left[1+(-1)^n\right] \cdot n\right)$
 (b) $\left((-1)^n \cdot \frac{n}{2}\right)$

Lösung: (prosaische Lösung, weitere Argumentationslinien vorstellbar!)

- (a) Zur besseren Vorstellung welche Werte von der Folge ausgegeben werden, die ersten 10 Folgewerte:

$$(a_n) = \left(\left[1+(-1)^n\right] \cdot n\right):$$

$$a_1 = 0, a_2 = 4, a_3 = 0, a_4 = 8, a_5 = 0, a_6 = 12, a_7 = 0, a_8 = 16, a_9 = 0, a_{10} = 20, \dots$$

Monotonieverhalten: Überlegung (a_n) ist weder monoton zunehmend noch monoton abnehmend:

Beweis durch Widerspruch:

- (1) Annahme: sei (a_n) monoton zunehmend, dann gilt: $a_{n+1} \geq a_n$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[1+(-1)^{n+1}\right] \cdot (n+1)}_{a_{n+1}} \geq \underbrace{\left[1+(-1)^n\right] \cdot n}_{a_n}; \text{ für } n \text{ gerade wird das } a_{n+1} \text{-te}$$

Folgenglied immer kleiner ($=0$) als das a_n -te Folgenglied.

WIDERSPRUCH!

- (2) Annahme: sei (a_n) monoton abnehmend, dann gilt: $a_{n+1} \leq a_n$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[1+(-1)^{n+1}\right] \cdot (n+1)}_{a_{n+1}} \leq \underbrace{\left[1+(-1)^n\right] \cdot n}_{a_n}; \text{ für } n \text{ ungerade wird das } a_n \text{-te}$$

Folgenglied immer kleiner ($=0$) als das a_{n+1} -te Folgenglied.

WIDERSPRUCH!

$\Rightarrow$ Die Folge (a_n) ist weder monoton zunehmend, noch monoton abnehmend und es

gilt: $0 \leq (a_n)$ die Folge besitzt nur eine untere Schranke ($S_u = 0$).

- (b) Zur besseren Vorstellung welche Werte von der Folge ausgegeben werden, die ersten 10 Folgewerte:

$$(a_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{n}{2} \right):$$

$$a_1 = 0,5; a_2 = 1; a_3 = -1,5; a_4 = 2; a_5 = -2,5; a_6 = 3; a_7 = -3,5; a_8 = 4; a_9 = -4,5; a_{10} = 5; \dots$$

Untersuchung der Folge: zerlegt man die Folge in zwei Faktoren, dann erkennt man schnell, dass $(-1)^n$ für gerade und ungerade n jeweils wechselnde Vorzeichen erzeugt und der Faktor $\frac{n}{2}$ für wachsende n unbegrenzt wächst.

$\Rightarrow (a_n)$ ist nicht monoton

$\Rightarrow (a_n)$ ist nicht beschränkt, weder nach oben, noch nach unten.