Vorbemerkungen: Die Matrix A sein eine $m \times n$-Matrix (m Zeilenindex, n Spaltenindex)
Im Folgenden beschränken wir uns auf quadratische Matrizen ($m = n$).
Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine allgemeine Darstellung einer quadratischen 2×2 - Matrix.

Definition: ***Determinante***

Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist wie folgt definiert:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad .$$

Herleitung zum Lösen von LGS mit Hilfe von Determinaten:

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1 + 5x_2 = 1 & |\cdot 2 \\ -3x_1 + 2x_2 = -11 & |\cdot(-5) \end{array}\right\} +$$

$\Rightarrow 19x_1 = 57 \;\Rightarrow\; x_1 = 3$

$\Rightarrow D = 19; D_1 = 57$

Allgemein:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & |\cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & |\cdot(-a_{12}) \end{array}\right\} +$$

$\Rightarrow (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{D} \cdot x_1 = \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}_{D_1}$$

$\Rightarrow D \cdot x_1 = D_1$

Bemerkung: *D heißt Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems. D_1 erhält man, indem man die 1. Spalte der Koeffizientendeterminante durch die Elemente der rechten Seite des Gleichungssystems ersetzt.*

analoges Vorgehen zur Bestimmung von x_2 resp. D_2:
Multipliziert man andererseits die erste Gleichung mit $-a_{21}$ und die zweite Gleichung mit a_{11} und addiert man beide Zeilen dann folgt:

$\Rightarrow 19x_2 = -19 \;\Rightarrow\; x_2 = -1$

$\Rightarrow D_2 = -19$

$(a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{D} \cdot x_2 = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}_{D_2}$$

$\Rightarrow D \cdot x_2 = D_2$

Man sieht sofort: Für $D \neq 0$ hat das Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \;\; x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad (\textbf{\textit{Cramersche Regel}}^1)$$

Beweisidee: Durch einsetzten der Lösungen in die Ausgangsgleichung kann man die Cramersche Regel leicht bestätigen.

Frage: Was kann man aus dem Ergebnis $D = 0$ schließen?
(*Hinweis: begründe deine Vermutung mit der Cramerschen Regel*)

[1] Gabriel Cramer (1704-1752), schweizer Mathematiker.

Lemma:
Zwei Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ des $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ gilt.

Beweis:
Der Ansatz $x_1\vec{u}+x_2\vec{v}=\vec{o}$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1x_1+v_1x_2 &= 0 \\ u_2x_1+v_2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}=D$$

<u>Fall (i):</u> für $D\neq 0$ existiert genau eine Lösung, nämlich die triviale Lösung
Beachte: das Gleichungssystem ist homogen!
$\Rightarrow$ die Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ sind linear unabhängig.

<u>Fall (ii):</u> für $D=0$ existieren unendlich viele Lösungen, insbesondere nichttriviale.
$\Rightarrow$ die Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ sind linear abhängig.

–

(3×3) **Determinanten**
Um Gleichungssysteme mit drei Gleichungen und drei Variablen zu untersuchen, benötigt man dreireihige Determinanten, die auf zweireihige Determinanten zurückgeführt werden: Unter den *algebraischen Komplement* A_{ij} zu einem Element a_{ij} einer dreireihigen Determinante versteht man die mit $(-1)^{i+j}$ multiplizierte zweireihige Determinante (*Unterdeterminante*), die durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Laplacescher[2] Entwicklungssatz
Die dreireihige Determinante wird nach folgendem Schema berechnet:
- man wählt eine Spalte aus
- man multipliziert die Spaltenelemente a_{ij} mit den zugehörigen algebraischen Komplementen A_{ij}
- man addiert diese Produkte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(<u>Bemerkung:</u> es ist gleichgültig, welche Spalte man zum Entwickeln auswählt. Auch Zeilen können zum Entwickeln der Determinante genutzt werden.)

Durch die Definition wird die Berechnung einer dreireihigen Determinante auf die Berechnung zweireihiger Determinanten zurückgeführt. Die lässt sich in analoger Weise auf n-reihige Determinanten erweitern.

[2] Pierre Simon Laplace (1749-1827), bedeutender französischer Mathematiker

Sarrus[3]-Regel
Man schreibt neben die dritte Spalte noch einmal die erste und dann die zweite Spalte an und subtrahiert von der Summe der Produkte in Richtung der Hauptdiagonale die Summe der Produkte in Richtung der Nebendiagonale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \right) - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} \right)$$

Aufgabe: Beweise die Sarrus-Regel mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

Übungen:

(1) Berechne die folgenden Determinanten:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

(2) Ergänze die fehlenden Stelle so, dass die Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 1 & \square & \square \\ 0 & 1 & \square \\ 0 & 0 & \square \end{vmatrix}$$

(3) Prüfe auf lineare Abhängigkeit resp. Unabhängigkeit:

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4r \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 2r \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$.

Man bestimme den Parameter r so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.

[3] Pierre F. Sarrus (1798-1861), französischer Mathematiker