Definition: ***Basis*** *[Wiederholung]*
Kann man jeden Vektor eines Vektorraums V als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ aus V darstellen, so heißt das Vektor-k-Tupel $\left(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \ldots; \overrightarrow{a_k}\right)$ ein **Erzeugendensystem** von V. Sind dabei die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ linear unabhängig, dann heißt $\left(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \ldots; \overrightarrow{a_k}\right)$ eine **Basis** von V.

Beispiel 1:
Es sei $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\right)$ einen Basis von $\mathbb{R}^3$ und stelle den Vektor $\vec{b}$ in dieser Basis dar.

<u>Lösung:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \text{ sind linear unabhängig} \Rightarrow \text{Basis von } \mathbb{R}^3$$

Darstellung von $\vec{b}$ mit der Basis $\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\right)$:

$\Rightarrow r_1\overrightarrow{a_1} + r_2\overrightarrow{a_2} + r_3\overrightarrow{a_3} = \vec{b}$ ergibt folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} r_1 & +r_2 & & = 2 \\ 2r_1 & & +r_3 & = 3 \\ & 2r_2 & +2r_3 & = 6 \end{array} \text{ mit der Lösung } r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}, r_3 = 2 \Rightarrow \vec{b} = \frac{5}{2}\overrightarrow{a_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a_2} + 2\overrightarrow{a_3}.$$

Beispiel 2:
Betrachte das homogene lineare Gleichungssystem $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$

mit Gauß-Verfahren $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}\left(34x_3 - 29x_4 - 4x_5\right) \\ x_2 = \frac{1}{11}\left(-19x_3 + x_4 + 10x_5\right) \end{cases}$ wähle $x_3 = s, x_4 = t, x_5 = u$

$$\Rightarrow \begin{array}{lllllll} x_1 = \frac{1}{11}\big(34s & + & (-29t) & + & (-4u)\big) \\ x_2 = \frac{1}{11}\big((-19s) & + & 1t & + & 10u\big) \\ x_3 = \frac{1}{11}\big(11s & + & 0t & + & 0u\big) \\ x_4 = \quad\big(0s & + & 1t & + & 0u\big) \\ x_5 = \quad\big(0s & + & 0t & + & 1u\big) \end{array}$$

Eine Basis des Lösungsraum ist also durch die drei Spalten (Koeffizienten von s, t, u) gegeben. Denn die Lösungen des LGS haben sich als Linearkombinationen dieser (linear unabhängigen) Vektoren ergeben.

Übungen

(1)

Bestimme die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$.

(a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ (c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$ (e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\11\\15\end{pmatrix}$

(b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-7\\11\\1\end{pmatrix}$ (f) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(2)

Es sei $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{a_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b_1}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \vec{b_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$.

(a) Stelle $s_1\vec{b_1}+s_2\vec{b_2}$ $(s_1,s_2\in\mathbb{R})$ als Linearkombination von $\vec{a_1},\vec{a_2}$ dar. Stelle dann $r_1\vec{a_1}+r_2\vec{a_2}$ $(r_1,r_2\in\mathbb{R})$ als Linearkombination von $\vec{b_1},\vec{b_2}$ dar.

(b) Was folgt daraus über die Untervektorräume $A=\left\{r_1\vec{a_1}+r_2\vec{a_2}\mid r_1,r_2\in\mathbb{R}\right\}$ und $B=\left\{s_1\vec{b_1}+s_2\vec{b_2}\mid s_1,s_2\in\mathbb{R}\right\}$ von $\mathbb{R}^3$?

(3)

Bestimme eine Basis $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ von $\mathbb{R}^3$ mit (a) $\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ (b) $\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=7\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}$

(4)

Bestimme eine Basis des Lösungsraums $x_1+x_3+x_4=0$.

(5)

Es sei $\left(\vec{a_1};\vec{a_2};\vec{a_3}\right)$ eine Basis des Vektorraums V. Zeige, dass $\left(\vec{b_1};\vec{b_2};\vec{b_3}\right)$ eine Basis von V ist. Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{v}=x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+x_3\vec{a_3}$ bezüglich der Basis $\left(\vec{b_1};\vec{b_2};\vec{b_3}\right)$.

$$\vec{b_1}=\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}\ ;\ \vec{b_2}=\vec{a_2}+\vec{a_3}\ ;\ \vec{b_3}=\vec{a_3}$$