AUFGABE 7:

Gesucht: $a, b \in \mathbb{R}$ für die ~~...~~ die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ linear abhängig sind.

Rechnung: Vektoren als Matrix

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} a & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & b & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}_a = a \cdot \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III}_a = a \cdot \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}_a \\ \mathrm{III}_a \end{array} \begin{pmatrix} a & 5 & 3 \\ 0 & 6a-5 & 2a-3 \\ 0 & ab-10 & 4a-6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}_b = (6a-5) \cdot \mathrm{III}_a \\ \quad - (ab-10) \cdot \mathrm{II}_a \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}_a \\ \mathrm{III}_b \end{array} \begin{pmatrix} a & 5 & 3 \\ 0 & 6a-5 & 2a-3 \\ 0 & 0 & (4a-6)(6a-5) - (2a-3)(ab-10) \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{III}_b \Rightarrow$ $(4a-6)(6a-5) - (2a-3)(ab-10) = 0$

$\Leftrightarrow$ $24a^2 - 20a - 36a + 30 - 2a^2b + 20a + 3ab - 30 = 0$

~~$\Leftrightarrow$ $24a^2 - 2a^2b - 32ab = 0$~~

$\Leftrightarrow$ $24a^2 - 2a^2b + 3ab - 36a = 0$ (*)

Ziel: lineare Abhängigkeit zeigt sich in einer vollständigen Nullzeile

$\rightarrow$ (*) auflösen nach b: $24a^2 - 36a = 2a^2b + 3ab$

$\Leftrightarrow$ $a(24a - 36) = ab(2a + 3)$

$\frac{\cancel{a}(24a-36)}{\cancel{a}(2a+3)} = b$ $\Rightarrow$ aus Zähler $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a = \frac{3}{2}}}$

Probe: a in (*) $\Rightarrow$ $\overset{6}{\cancel{24}} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} - \cancel{2} \cdot \frac{9}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot b + 3 \cdot \frac{3}{2} b - 36 \cdot \frac{3}{2}$

$= 54 - \frac{9}{2}b + \frac{9}{2}b - 54 = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{b \text{ bel. } \in \mathbb{R}}}$

$\rightarrow$ (*) auflösen nach a: $24a^2 - 2a^2b + 3ab - 36a = 0$

$\Leftrightarrow$ $2a^2(12 - b) + 3a(b - 12) = 0$

$\Rightarrow$ für $\underline{\underline{b = 12}}$ ist die Gleichung erfüllt.

und $\underline{\underline{a \text{ bel. } \in \mathbb{R}}}$