1 Basiswissen:

1.1 **Definition:** In einer Ebene werden durch ein Koordinatensystem Punkte und Zahlenpaare einander zugeordnet. Ist dem Zahlenpaar $(a;b)$ der **Punkt** P zugeordnet, so schreiben wir $P(a|b)$ und nennen a und b die **Koordinaten** von P.

1.2 **Bezeichnung:** $|x|$ (*lies: **Betrag von x***) bezeichnet die größere der Zahlen x und $-x$ bzw. 0, falls $x=0$.

1.3 **Bezeichnung:** $\max\{x;y\}$ (*lies: **Maximum von x und y***) bedeutet die größere der Zahlen x und y, bzw. den gemeinsamen Wert von x und y, falls $x=y$.

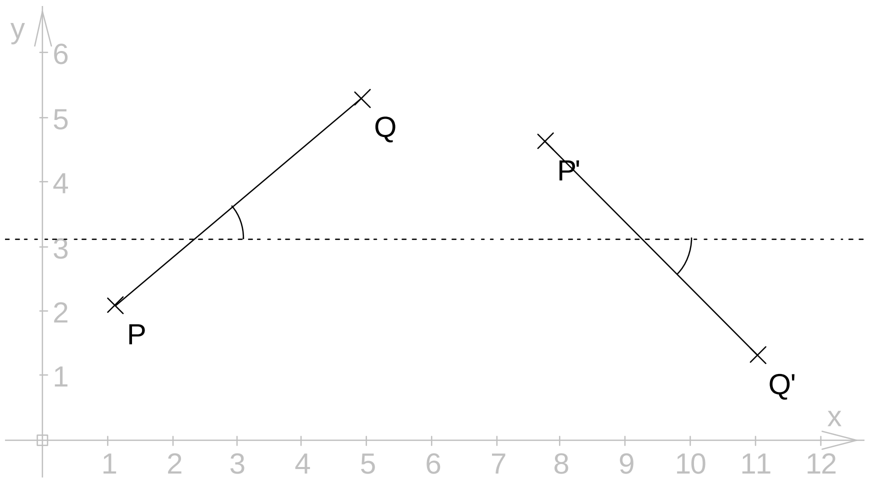
1.4 **Definition:** Eine **Strecke** ist durch ihre Endpunkte P und Q bestimmt. Durch die Koordinaten von P und Q sind also z.B. auch die Länge, die Mitte und die Richtung der Strecke festgelegt.

1.5 **Lemma:** Die **Länge** einer Strecke PQ wird in der Längeneinheit angegeben, welche auf den Koordinatenachsen gegeben ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

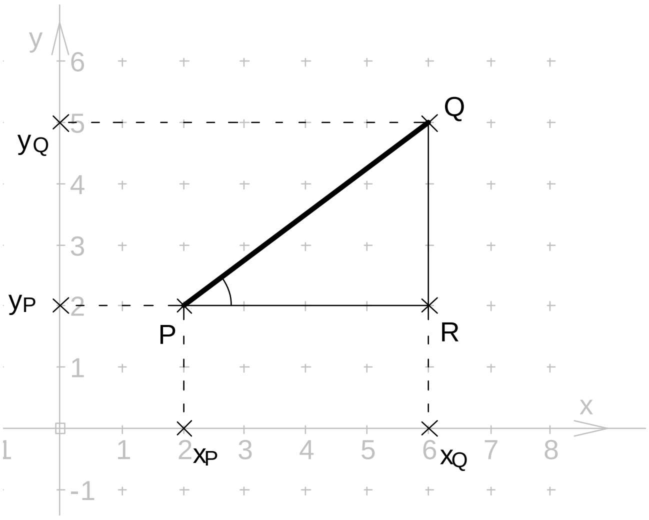
$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}\ .$$

(Bemerkung: Für die Berechnung der Länge der Strecke ist die Reihenfolge der Punkte irrelevant, wie der Leser leicht erkennt.)

1.6 **Lemma:** Die **Richtung** einer Strecke ist festgelegt durch den Winkel α $(0° \leq \alpha < 180°)$, den sie mit der Richtung der positiven x-Achse bildet.



Ist eine Strecke PQ durch die Koordinaten von P und Q gegeben, so verwendet man statt α den leichter zu berechnenden Tangens von α, also das Verhältnis $\overline{QR} : \overline{PR}$.



Die Zahl $\tan a$ heißt **Steigung** (a **Steigungswinkel**) von PQ und wird mit m_{PQ} bezeichnet. Falls $x_P \neq x_Q$ ist, gilt:

$$m_{PQ} = \tan a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P}.$$

Ist $x_P = x_Q$, also PQ parallel zur y-Achse, so ist $a = 90°$; solche Strecken haben keine Steigung(szahl).

(Bemerkung: Für die Berechnung der Steigung einer Strecke ist die Reihenfolge der Punkte irrelevant, wie der Leser leicht er$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ kennt.)

1.7 **Lemma:** Für die **Mitte** $M(x_M \mid y_M)$ von PQ gilt:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)\ ; \quad y_M = \frac{1}{2}(y_P + y_Q).$$

1.8 **Lemma:** Sei g eine Gerade. Jedes Zahlenpaar $(x; y)$ mit $P(x \mid y) \in g$ erfüllt die Gleichung $y = mx + c$ (**Hauptform**).

Für achsenparallel Geraden durch $A(x_A \mid y_A)$ gilt:

Parallele zur y- Achse: $x = x_A$,

Parallele zur x-Achse: $y = y_A$.

1.9 **Satz:** Ist eine Gerade gegeben durch einen Punkt $A(x_A \mid y_A)$ und die Steigung m oder durch zwei Punkte $A(x_A \mid y_A)$, $B(x_B \mid y_B)$ $(x_A \neq x_B)$, so erhält man ihre Gleichung aus

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = m\ , \quad \text{bzw.} \quad \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

1.10 **Satz:** Jede Gleichung der Form

$Ax + By + C = 0 \qquad (A \neq 0 \text{ oder } B \neq 0)$

stellt in der x, y-Ebene eine Gerade dar.

1.11 **Lemma:** Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann **parallel**, wenn gilt:

$m_1 = m_2$

1.12 **Lemma:** Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann **orthogonal**, wenn gilt:

$m_2 = -\dfrac{1}{m_1} \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot m_2 = -1$.

1.13 **Lemma:** Zwei sich schneidende Geraden g und h bilden (sofern sie nicht orthogonal sind) zwei Winkel. Den kleineren der beiden nennen wir den **Schnittwinkel** d von g und h. Um d (mit $0° \leq d < 90°$) zu berechnen, ermitteln wir aus den Steigungen m_g und m_h die Steigungswinkel a_g und a_h. Ist $a_g > a_h$, so gilt

$d = a_g - a_h \quad \text{oder} \quad d = 180° - (a_g - a_h)$.

1.14 **Definition:** Eine Zuordnung der Form $x \mapsto mx + c$ heißt **lineare Funktion**.

1.15 **Satz:** Bei einer linearen Funktion $x \mapsto mx + c$ gilt für jeden x-Wert: Vergrößert man den x-Wert um d, so ändert sich der Funktionswert um das m-fache von d.

1.16 **Definition:** Lineare Funktionen der Form $x \mapsto mx$ heißen **Proportionalitäten** (**proportionale Funktionen**).

1.17 **Definition:** Zuordnungen der Form $x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ heißen **Potenzfunktionen**.

1.18 **Satz:** Bei einer Funktion $x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ wird dem k-fachen eines x-Wertes das k^n-fache seines Funktionswertes zugeordnet.

1.19 **Definition:** Zuordnungen der Form $x \mapsto q^x \quad (q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ heißen **Exponentialfunktionen**.

1.20 **Satz:** Wenn man bei Funktionen der Form $x \mapsto cq^x$ zu einem x-Wert d addiert, dann wird der zugehörige Funktionswert mit q^d multipliziert.

1.21 **Definition:** Unter dem **Bogenmaß eines Winkels** versteht man die Maßzahl der zugehörigen Bogenlänge im Einheitskreis.

Bsp.: Gradmaß: $180°$ = Bogenmaß p ; Gradmaß: $90°$ = Bogenmaß $\frac{p}{2}$, …

1.22 **Definition:** $\sin x = \frac{\text{Gegenkathete von } a}{\text{Hypotenuse}}$ und $\cos x = \frac{\text{Ankathete von } a}{\text{Hypotenuse}}$.

1.23 **Definition:** Die Zuordnung $x \mapsto \sin x$ heißt **Sinusfunktion** und die Zuordnung $x \mapsto \cos x$ heißt **Kosinusfunktion**.

1.24 **Satz:** Es ist $-1 \le \sin x \le +1$ und $-1 \le \cos x \le +1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind periodisch mit der **Periode** $2p$, d.h.

$\sin(x + k \cdot 2p) = \sin x$ und $\cos(x + k \cdot 2p) = \cos x$ für alle $k \in Z, x \in R$,

$\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ für alle $x \in R$.

1.25 **Lemma:** Additionstheoreme

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

1.26 **Definition:** D sei eine nichtleere Teilmenge von R. Eine Zuordnung, die jeder Zahl $x \in D$ genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt (reelle) **Funktion**.

Wenn eine Zuordnungsvorschrift V_1 jedem $x \in D$ dieselbe Zahl zuordnet wie eine Zuordnungsvorschrift V_2, so sagen wir: V_1 und V_2 bestimmen dieselbe Funktion.

1.27 **Definition:** Eine Funktion $x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \ne 0$ $(n \in N_0)$, deren Funktionsterm ein Polynom ist oder auf diese Form gebracht werden kann, heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades**. Das Schaubild von f heißt (für $n > 1$) **Parabel** n-ter Ordnung.

1.28 **Definition:** f sei eine umkehrbar eindeutige Funktion. Dann heißt die Funktion

$\overline{f} : f(x) \mapsto x$ mit $D_{\overline{f}} = W_f$; $W_{\overline{f}} = D_f$

die **Umkehrfunktion** von f .

1.29 **Satz:** Die Funktion $f : x \mapsto x^n$ $(n \in N)$ hat für $x \in R_0^+$ die Umkehrfunktion

$\overline{f} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

1.30 **Satz:** Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto q^x \ \ (q \in R^+ \setminus \{1\})$ hat die Umkehrfunktion

$\overline{f}: x \mapsto {}_q\log x$.

Ihre Definitionsmenge ist R^+, ihre Wertemenge R.

2 Grenzwerte

2.1 **Bemerkung:** Eine Zahlenfolge kann einen „Grenzwert“, eine Folge von Figuren eine „Grenzfigur“, eine Folge von Punkten einen „Grenzpunkt“ haben. Die Vermutung, dass eine unendliche Folge von immer größer werdenden Zahlen schließlich jede noch so große Zahl überschreitet, ist nicht richtig.

2.2 **Definition:** Eine Zahlenfolge (a_n) heißt

monoton zunehmend (oder monoton steigend), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n,

monoton abnehmend (oder monoton fallend), wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n.

2.3 **Definition:** Eine monotone Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl S_o gibt, so dass $a_n \leq S_o$ ist für alle n. Eine monotone Folge (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl S_u gibt, so dass $a_n \geq S_u$ ist für alle n. S_o nennt man **obere Schranke**, S_u eine **untere Schranke** der Folge.

2.4 **Bemerkung:** Die Begriffe „obere Schranke“ und „untere Schranke“ verwendet man in gleicher Weise bei nicht-monotonen Folgen. Hat eine Folge sowohl obere als auch untere Schranken, so nennt man sie kurz eine **beschränkte Folge**.