Stammfunktionen:

Verkettung mit einer linearen Funktion:

Satz: Bei Verkettungen mit einer linearen Funktion gilt:
Für

$$f(x)=u\left(rx+s\right) \text{ ist } F(x)=\frac{1}{r}U\left(rx+s\right).$$

Beispiel:

$f(x)=(2x+4)^3$ kann man als Verkettung $u(v(x))$ mit $u(x)=x^3$ und $v(x)=2x+4$ aufgefasst werden. Nach obigen Satz gilt (da $v(x)$ ein lineares Glied ist):

$U(x)=\frac{1}{4}x^4$ mit $r=2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2x+4\right)^4=\frac{1}{8}\cdot\left(2x+4\right)^4$

Integration von Produkten

Aus der Produktregel kann ein Verfahren zur Bestimmung von Integralen gewonnen werden. Aus $f=u\cdot v$ folgt $f'=u'v\cdot uv'$. Integration über die Funktion f' von a bis b ergibt:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\ dx+\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\ dx.$$

Wegen $\int_a^b f'(x)dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$ gilt:

Satz: (Produktintegration; Partielle Integration)
Sind u und v auf dem Intervall $\left[a;b\right]$ differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungsfunktionen u' bzw. v', so gilt:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Beispiel:
(1)
Bestimme $\int_0^1 3x\cdot e^{2x}dx$.

Lösung:
Wählt man $u(x)=3x$ und $v'(x)=e^{2x}$, so ist $u'(x)=3$ und $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

Also gilt: $\int_0^1 3x\cdot e^{2x}dx=\int_0^1 u(x)\cdot v'(x)\ dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_0^1-\int_0^1 u'(x)\cdot v(x)\ dx$

$$=\left[3x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{3}{2}e^2-\left[\frac{3}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}$$

(2)

Bestimme $\int \frac{1}{2}\left(x+5\right)\cdot e^{-x}dx$

Lösung:

$u(x)=\frac{1}{2}\left(x+5\right)=\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \qquad \rightarrow \qquad u'(x)=\frac{1}{2}$

$v'(x)=e^{-x} \qquad \rightarrow \qquad v(x)=-e^{-x}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{-x}dx=\int u(x)\cdot v'(x)\ dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]-\int u'(x)\cdot v(x)\ dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int \frac{1}{2}\cdot\left(-e^{-x}\right)dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\frac{1}{2}\int\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\frac{1}{2}e^{-x}=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{5}{2}e^{-x}=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-x}-\frac{6}{2}e^{-x}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}\left(x+6\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\left(x+6\right)$$

Stammfunktion von $\ln(x)$:

Mit der Produktintegration lässt sich eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion f mit $f(x)=\ln x$ bestimmen. Man schreibt dazu

$$f(x)=\left(\ln x\right)\cdot 1.$$

Mit $u(x)=\ln x$ und $v'(x)=1$ erhält man $u'(x)=\frac{1}{x}$ und $v(x)=x$. Damit ergibt sich für $a,b>0$:

$$\int_a^b \ln(x)\ dx=\int_a^b\left(\ln(x)\right)\cdot 1\ dx=\left[\left(\ln x\right)\cdot x\right]_a^b-\int_a^b \frac{1}{x}\cdot x\ dx=\left[\left(\ln x\right)\cdot x\right]_a^b-\left[x\right]_a^b$$

$$=\left[\left(\ln x\right)\cdot x-x\right]_a^b$$

Satz: Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\ln(x)$ ist die Funktion F mit

$$F(x)=\left(x\cdot\ln x\right)-x.$$