

A1 - Lösungsskizzen

$$1) f_t(x) = t \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f_t'(x) = t \cdot \frac{(x-1)^2 \cdot (2x+2) - (x^2+2x) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = t \cdot \frac{-4x-2}{(x-1)^3} = -2t \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^3}$$

$$f_t''(x) = -2t \cdot \frac{(x-1)^3 \cdot 2 - (2x+1) \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} = -2t \cdot \frac{2x-2-6x-3}{(x-1)^4} = -2t \cdot \frac{-4x-5}{(x-1)^4} = 2t \cdot \frac{4x+5}{(x-1)^4}$$

Nullstellen bei x_0 : notwendig und hinreichend: $f_t(x_0) = 0$

$$\Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0(x_0+2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0, x_0 = -2$$

(nicht von t abhängig!)

Asymptoten a) senkrechte $x=1$ (ohne Vorzeichenwechsel)

b) welt-senkrecht: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} t \cdot \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} t \cdot \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = t$

$$\Rightarrow A(x) = t$$

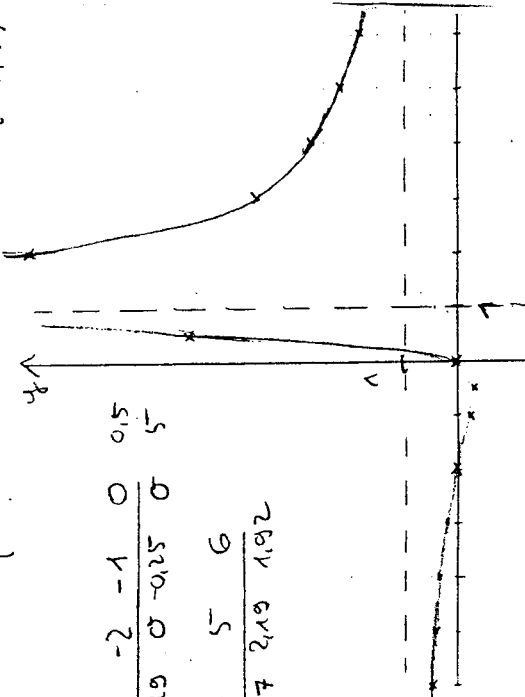
Extremwerte bei x_e : notwendig: $f_t'(x_e) = 0$

$$\Rightarrow 2x_e + 1 = 0 \Rightarrow x_e = -\frac{1}{2}, y_e = t \cdot \frac{1-1}{(-\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{3}t$$

hinreichend: $f_t''(x_e) \neq 0$ $\begin{cases} > 0 \text{ für } t > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt } T_e(-\frac{1}{2} | -\frac{1}{3}t) \\ < 0 \text{ für } t < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt } H_e(-\frac{1}{2} | -\frac{1}{3}t) \end{cases}$

$$2) f_1(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5
y	9,49	9,42	9,32	9,19	9,0	-0,25	0	5
x	1	2	3	4	5	6		
y	n.d.	8	3,75	2,67	2,19	1,92		



A1 - Lösungsskizzen - 2 -

$$3) f_{t_1}(x) = t_1 \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \quad f_{t_2}'(x) = -2t_2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^3}$$

notwendige Bedingung für Schnittpunkte x_s : $f_{t_1}(x_s) = f_{t_2}(x_s)$

$$t_1 \cdot \frac{x_s^2 + 2x_s}{(x_s-1)^2} = t_2 \cdot \frac{x_s^2 + 2x_s}{(x_s-1)^3} \Rightarrow (t_1 - t_2) \cdot \frac{x_s^2 + 2x_s}{(x_s-1)^2} = 0$$

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow t_1 - t_2 \neq 0 \Rightarrow x_s^2 + 2x_s = 0 \Rightarrow x_s(x_s+2) = 0 \Rightarrow x_{s1} = 0, x_{s2} = -2$$

Schnittpunkte: $m_{t_1} = -2t_1 \cdot \frac{2x_s+1}{(x_s-1)^3}$

$$x_s = 0 \Rightarrow m_{t_1} = -2t_1 \cdot \frac{0+1}{(-1)^3} = 2t_1$$

relativwichtig, falls $2t_1 \cdot 2t_2 = -1$, d.h. $t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{4}$

$$x_s = -2 \Rightarrow m_{t_1} = -2t_1 \cdot \frac{-4+1}{(-3)^3} = \frac{2}{9}t_1$$

relativwichtig, falls $\frac{2}{9}t_1 \cdot \frac{2}{9}t_2 = -1$, d.h. $t_1 \cdot t_2 = -\frac{81}{4}$

Wird beides gleichzeitig möglich!

4) HDI:

$$\left(x + 4 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} \right)' = 1 + \frac{4}{x-1} - \frac{3(-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} + \frac{4x-4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x-1)^2} \checkmark$$

$$J = \int \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} dx = \int \left(1 + \frac{4x-1}{(x-1)^2} \right) dx \quad \frac{(x^2+2x) \cdot (x^2-2x+1)}{x^2-2x+1} = 1$$

$$J_1 = \int \frac{4x-1}{(x-1)^2} dx \quad \text{Substitution: } u = x-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

$$J_1 = \int \frac{4(u+1)-1}{u^2} du = \int \frac{4u+3}{u^2} du = \int \left(\frac{4}{u} + \frac{3}{u^2} \right) du$$

$$= 4 \cdot \ln|u| - \frac{3}{u} + C' = 4 \cdot \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C''$$

$$\Rightarrow J = x + 4 \cdot \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

$$5) J = \int_2^4 f_1(x) dx = \left[x + 4 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} \right]_2^4$$

$$= 4 + 4 \cdot \ln 3 - 1 - \left(2 + 4 \ln 1 - 3 \right) = 3 + 4 \ln 3 - (-1) = 4 + 4 \ln 3 \Rightarrow F = 4 + 4 \ln 3 \quad \text{P.F.}$$