

S 4 - Lösungsskizzen

1) a) X: Anzahl brauchbarer Kacheln unter 20 Ausgangskacheln ist $B_{20, \frac{1}{10}}$ -verteilt
 $P(X=20) = \binom{20}{20} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{20} \approx 0,1216$

b) Y: Anzahl durchgeschalteter Kacheln unter 20 ist $B_{20, \frac{1}{10}}$ -verteilt

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[\binom{20}{0} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{20} + \binom{20}{1} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{19} + \binom{20}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{18} \right] \\ \approx 1 - 0,6769 = 0,3231$$

2) X: Anzahl brauchbarer unter 3 Kacheln $W_X = 10, 11, 13$

A: brauchbare Kachel im 1-ten Versuch ($i=1, 2, 3$) $P(A_i) = \frac{3}{10}$

$$(X=0) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3, (X=1) = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

$$(X=2) = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3), (X=3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{3-k}$$

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

$$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{27}{10} = 2,7$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{63}{100} = 0,63$$

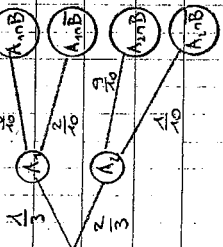
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{1000} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{28}{1000} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{271}{1000} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

3) X: Anzahl brauchbarer unter n durchgeschalteten Kacheln ist $B_{n, \frac{1}{10}}$ -verteilt
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^n - \binom{n}{1} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} > 0,99$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^n + n \cdot \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} < 0,01 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \left(\frac{1+9n}{10}\right) < 0,01$

Durch Probieren: $n=3: 0,028 > 0,01$; $n=4: 0,0037 < 0,01$!

Man muss mindestens 4 Kacheln durchschalten

4) a) A_1 : Montagskachel (dunkelblau), A_2 : Dienstagskachel (hellblau), B : brauchbar



a) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B) + P(A_2) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

b) $P_{\bar{B}}(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{\bar{B}}(A_1)}{P_{\bar{B}}(A_1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{9}$

S 4 - Lösungsskizzen

5) $H_0: p \leq 0,1$, X: Anzahl Ausgangskacheln unter 50 Kontrollkacheln

Bei welcher Nullhypothese H_0 ist X im Extremfeld $B_{50, \frac{1}{10}}$ -verteilt?

a) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0,8779 = 0,1221$

Bei Ablehnung der Gütefunktion beträgt seine Irrtumswk 17,21%

b) Bestimmungsgültigkeit des Tests X_p mit: $P(X \geq X_p) = 1 - P(X \leq X_p - 1) < 0,05$
 $\Rightarrow P(X \leq X_p - 1) > 0,95$ nach Tabelle: $P(X \leq 8) = 0,9421$; $P(X \leq 9) = 0,9755$
 $\Rightarrow X_p - 1 = 9 \Rightarrow X_p = 10 \Rightarrow$ Ablehnungsschwellenwert $X = \{10, 11, \dots, 50\}$

6) $H_0: p \leq 0,1$ (zweiseitiger Test) X: Anzahl Ausgangskacheln unter 50 Kontrollkacheln
Y: jeweilige Anzahl unter 100 Kontrollkacheln Kacheln

Bei welcher H_0 ist im Extremfeld X $B_{50, \frac{1}{10}}$ -verteilt und Y $B_{100, \frac{1}{10}}$ -verteilt?

a) $R = P(X > 12) + P(6 \leq X \leq 12) \cdot P(Y > 10)$
 $= 1 - P(X \leq 12) + (P(X \leq 12) - P(X \leq 5)) \cdot (1 - P(Y \leq 10))$
 $= 1 - 0,9999 + (0,9999 - 0,6161) \cdot (1 - 0,5832)$
 $= 0,0001 + 0,3829 \cdot 0,4168 \approx 0,1606$ (16% Irrtumswk)

b) $R = P(X > 12) + P(6 \leq X \leq 12) \cdot \alpha = 0,05$
 $\Rightarrow 0,05 = 0,0001 + 0,3829 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 0,1280$

ges. Y_p mit $P(Y \geq Y_p) = 1 - P(Y \leq Y_p - 1) < 0,1280$
 $P(Y \leq Y_p - 1) > 0,872$ nach Tabelle: $P(Y \leq 12) = 0,8018$; $P(Y \leq 13) = 0,8761$
 $\Rightarrow Y_p - 1 = 13 \Rightarrow Y_p = 14$ Bei einem Ablehnungsschwellenwert $K = \{14, \dots, 100\}$

Für die Zweiseitigkeit der Gütefunktion des Tests ist das Risiko 5%

7) A: Kachel ist brauchbar; B: Prüfautomat arbeitet fehlerfrei

geg: $P(A) = \frac{9}{10}$, $P(B) = \frac{1}{100}$, $P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{100}$

a) $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{12}{1000}$

b) $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{99}{100} + \frac{1}{10} \cdot \frac{99}{100} = \frac{894}{1000}$

d.h. eine Kachel als brauchbar ausgewertet wird $\Rightarrow$

X: Anzahl als brauchbar ausgewertete unter 1000 Kacheln

$E(X) = 1000 \cdot \frac{894}{1000} = 894$