Übungen zum Mathematik-Abitur

Geometrie 1

Gegeben sind die Punkte $M(2|4|2)$ und $P(5|6|4)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1:
Die Ebene E_1 enthält g und M. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von E_1.
(Lösungshinweis: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ *)*

Lösung:

Entwicklung der Ebenengleichung durch die Normalenform: $E_1: (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

und dem Zusammenhang, dass für die Koordinatengleichung $E_1: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ gilt.

Sei $\overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor zur Geraden g und $\vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ der Differenzvektor des Stützvektors der Geraden g und dem Ortsvektor $\vec{m}$ vom Punkt M.
Diese beiden Vektoren liegen in der Ebene E_1 und sind linear unabhängig. Daraus folgt, dass die beiden die Ebene E_1 aufspannen.
Also gilt:

$$\overrightarrow{u_g} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{u_g} \circ \vec{n} = 0 \text{ und } \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v} \circ \vec{n} = 0$$

und somit folgt:

$$u_{g_1}n_1 + u_{g_2}n_2 + u_{g_3}n_3 = 0 \Leftrightarrow -4n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$$

$$v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3 = 0 \Leftrightarrow 5n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$$

Durch Multiplikation der zweiten Zeile mit 2 und danach durch Addition der mit der ersten Zeile folgt:

$$6n_1 - 6n_3 = 0 \Rightarrow n_1 = n_3$$

Wähle $n_3 = 2 \Rightarrow n_1 = 2$ und mit ersten Zeile der Gleichungen folgt:

$$-4 \cdot 2 + 4n_2 + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow n_2 = 1$$

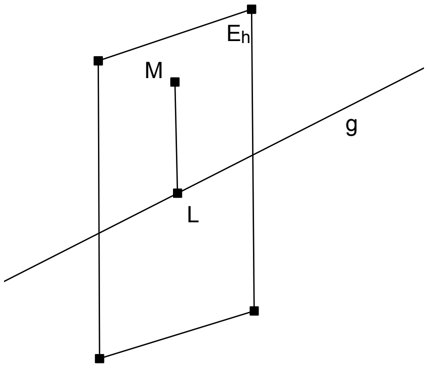
und somit ist der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E_1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und für die

Koordinatengleichung ergibt sich: $E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$. Mit der Punktprobe für M in E_1 folgt:

$$2 \cdot 2 + 4 + 2 \cdot 2 = d = 12 \text{ und somit ergibt sich } E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12.$$

Aufgabe 2:
Fällen Sie das Lot von M auf g. Geben Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L und die Länge d des Lotes an.

Lösung:



Erläuterungen zur Skizze:
E_h ist eine Ebene die orthogonal zur Geraden g steht und den Punkt M enthält. L ist der Durchstoßpunkt der Geraden mit der Ebene.

Konstruktion der Hilfsebenen E_h:
sei $M \in E_h$ und der Richtungsvektor $\overrightarrow{u_g}$ der Geraden g ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_h}}$

$\Rightarrow E_h: -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = d$ mit der Punktprobe für M folgt:
$\Rightarrow -4\cdot 2 + 4\cdot 4 + 2\cdot 2 = 12 = d$
$\Rightarrow E_h: -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$ vereinfacht
$\Rightarrow E_h: -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

Berechnung des Punktes L: sei $L = E_h \cap g$

aus $g \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 7-4r \\ x_2 &= 2+4r \\ x_3 &= -2+2r \end{aligned}\right\}$ eingesetzt in E_h ergibt: $-2(7-4r)+2(2+4r)+(-2+2r)=6$

$$\begin{aligned} -14+8r+4+8r-2+2r &= 6 \\ 18r &= 18 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

eingesetzt in g ergibt: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L(3|6|0)$

Die Länge des Lotes ist gleich dem Abstand zwischen L und M

$$\Rightarrow d(M;L) = \left|\vec{m}-\vec{l}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}\right| = \sqrt{9} = 3LE$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie diejenigen Punkte A und B auf g, die von L die Entfernung d haben.

Lösung:
Um die Länge d auf einer Geraden abzutragen, benötigt man einen Vektor der Geraden der Länge eins $\Rightarrow$ wir bilden den Einheitsvektor des Richtungsvektor $\overrightarrow{u_g}$

Länge des Vektors $\overrightarrow{u_g} = \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}\right| = \left|\sqrt{16+16+4}\right| = 6$

Daraus folgt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{u_g}^0 = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ und für die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

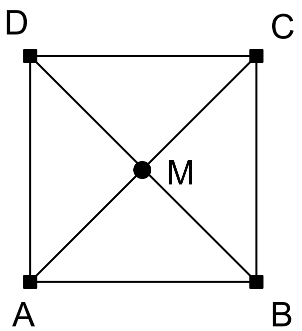
ergibt sich: $\vec{a} = \vec{l} - d\cdot\overrightarrow{u_g}^0$ und $\vec{b} = \vec{l} + d\cdot\overrightarrow{u_g}^0$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A(5|4|-1)$ und $B(1|8|1)$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Punkte C und D, so dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M ist.

Lösung:
Skizze:



$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) \Rightarrow \vec{c} = 2\vec{m} - \vec{a} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix} \Rightarrow C(-1|4|5)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}) \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{m} - \vec{b} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow D(3|0|3)$$

Aufgabe 5:
Die Gerade g und der Punkt P bilden die Ebene E_2. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von E_2. Berechnen Sie die den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

Lösung:
Gleiches Vorgehen und Argumentation wie bei Aufgabe 1 zur Bestimmung der Koordinatengleichung.

$$\overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

aus $\overrightarrow{n_{E_2}} \perp \overrightarrow{u_g} \Rightarrow -4n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$ und aus $\overrightarrow{n_{E_2}} \perp \overrightarrow{v_2} \Rightarrow 2n_1 - 4n_2 - 6n_3 = 0$
Durch Addition der beiden Gleichungen $\Rightarrow -2n_1 - 4n_3 = 0 \Rightarrow n_1 = -2n_3$ Wähle $n_3 = 1$
$\Rightarrow n_1 = -2$ und daraus folgt $2 \cdot (-2) - 4n_2 - 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow n_2 = -\frac{5}{2}$. Durch Multiplikation des Normelenvektors mit 2 erhält man eine „schönere" Darstellung der Koordiantenform:
$\Rightarrow E_2 : -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = d$ mit Punktprobe für P folgt: $-4 \cdot 5 - 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = -42 = d$

$$\Rightarrow E_2 : -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -42$$

Für den Schnittwinkel zweier Ebenen mit den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

Daraus folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-8-5+4\right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{45}} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4350°$$

Aufgabe 6:
Über dem Quadrat $ABCD$ wird eine senkrechte Pyramide errichtet, von der eine Seitenfläche in der Ebene E_2 liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S und das Volumen der Pyramide.

Lösung:
Idee: Da die Pyramide senkrecht ist, liegt die Spitze S auf der orthogonalen Geraden zur Grundfläche $ABCD$ durch den Punkt M. Die Gerade $\overline{MS}$ nennen wir g_M.
Der Normalenvektor der Ebenen E_1 ist der Richtungsvektor $\overrightarrow{u_{g_M}}$ der Geraden g_M. Als Stützvektor wird der Ortsvektor $\vec{m}$ verwendet.

$$\Rightarrow g_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diesen schneiden wir nun mit der Ebene $E_2 : -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -42$

$$\Rightarrow -4 \cdot (2 + 2r) - 5 \cdot (4 + r) + 2 \cdot (2 + 2r) = -42$$
$$\Rightarrow -8 - 8r - 20 - 5r + 4 + 4r = -42$$
$$\Rightarrow -9r = -18 \Rightarrow r = 2$$

Daraus folgt für S: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S(6|6|6)$

Die Höhe der Pyramide ergibt sich aus dem Abstand der Punkte S und M (oder der Länge des Vektors $\overrightarrow{SM}$).

$$\left|\overrightarrow{SM}\right| = \left|\vec{m} - \vec{s}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Der Flächeninhalt der Grundfläche ergibt sich aus Aufgabe 3: Der Abstand zwischen A und B ist 6. Da $ABCD$ ein Quadrat ist, ergibt sich für den Flächeninhalt $G = 6^2 = 36FE$.

Und daraus ergibt sich für das Volumen V_P der Pyramide mit $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72VE$$

Aufgabe 7:

Bei welcher Wahl von S^* als Spitze beträgt das Volumen der Pyramide bei gleicher Grundfläche $144VE$?

Wie groß ist dann der Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche?

Lösung:

Sei $V^* = \frac{1}{3} G h^* = 144VE \Rightarrow h^* = \frac{144 \cdot 3}{G} = \frac{144 \cdot 3}{36} = 12LE$. Um den neuen Punkt S^* zu bestimmen, braucht man einen Normaleneinheitsvektor zur Ebene $ABCD$. Aus den vorherigen Aufgaben ist bekannt, dass der Vektor $\overrightarrow{u_{g_M}}$ orthogonal zur Ebene steht. Mit

$$\left|\overrightarrow{u_{g_M}}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ folgt für } \overrightarrow{u_{g_M}}^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ist klar, dass man 2 Punkte S^* bestimmen kann, die das vorgegebene Volumen begrenzen, einer „über" der Ebene $ABCD$ und einer „darunter". Aus der Linearkombination für den Vektor S_1^* resp. S_2^* ergibt sich:

$$\overrightarrow{s_1^*} = \vec{m} + 12 \cdot \overrightarrow{u_{g_M}}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{s_2^*} = \vec{m} - 12 \cdot \overrightarrow{u_{g_M}}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1^*(10|8|10) \text{ und } S_2^*(-6|0|-6).$$

Um den Winkel β zwischen der Fläche $ABCD$ (oder der Ebene E_1) und der neuen Seitenfläche E_3 zu berechnen, muss zuvor die Koordinatengleichung der Ebene E_3 bestimmt werden.
Wir wissen, dass die Ebene E_3 z.B. die Punkte A, B, S_1^* enthält (andere Wahl auch möglich).
Mit diesen Punkten entwickeln wir die Koordiantengleichung: die Koeffizienten der Koordinatengleichung sind die Koordinaten des Normalenvektors, der orthogonal zur Ebene E_3 steht. Somit stehen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS_1^*}$ auch orthogonal zu $\overrightarrow{n_{E_3}}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS_1^*} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ und da $\overrightarrow{n_{E_3}} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{n_{E_3}} \perp \overrightarrow{AS_1^*}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{r} -4n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0 \\ 5n_1 + 4n_2 + 11n_3 = 0 \end{array}\right\} \text{durch Subtraktion} \Rightarrow -9n_1 - 9n_3 = 0 \Rightarrow n_1 = -n_3 \text{ wähle } n_3 = -2$$

$\Rightarrow n_1 = 2$ und durch einsetzen in eine der beiden Gleichungen folgt: $10 + 4n_2 - 22 = 0 \Rightarrow n_2 = 3$
Daraus ergibt sich für $E_3: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = d$ mit Punktprobe für $A \Rightarrow 10 + 12 + 2 = d = 24$.

$$E_3: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 24 \text{ und für } \overrightarrow{n_{E_3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für den Winkel β zwischen den Ebenen E_1 und E_3 gilt: $\cos\beta = \dfrac{|\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|}$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|4+3-4|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \beta \approx 75{,}9638°$$