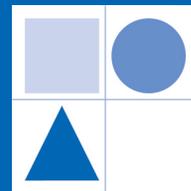


Bundeswettbewerb Mathematik 2006



Der Bundeswettbewerb Mathematik ist eine Initiative des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft. Er wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und vom Stifterverband unter Beteiligung der Länder. Träger ist der Verein Bildung und Begabung e.V.

Die Aufgaben der ersten Runde 2006

Aufgabe 1

Man finde zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen, deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.

Aufgabe 2

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ gilt.

Aufgabe 3

Für die Seitenlängen a , b und c eines Dreiecks gelte die Beziehung $a^2 + b^2 > 5c^2$.

Man beweise, dass dann c die Länge der kürzesten Seite ist.

Aufgabe 4

Ein quadratisches Blatt Papier liegt auf dem Tisch. Es wird schrittweise in mehrere Teile zerschnitten: Bei jedem Schritt wird ein Teil vom Tisch genommen und durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegt; diese beiden Teile werden auf den Tisch zurückgelegt.

Man bestimme die kleinste Anzahl an Schritten, mit denen man erreichen kann, dass sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden.

Anmerkung: In den Aufgaben 1 und 4 ist die Richtigkeit der Resultate zu beweisen.

Bitte beide Coupons in Druckschrift vollständig und ohne Abkürzungen ausfüllen; den **Teilnahmecoupon** oben links auf die Rückseite des Umschlags (Verschluss rechts) aufkleben, den **EDV-Coupon** in den Umschlag legen. Mit der Teilnahme wird eine Speicherung der Daten zugestimmt.



Teilnahmecoupon 2006

ABSENDER:

Name Vorname geb. am

Straße / Nr. PLZ / Ort

Tel. Bundesland

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe Männl.* Weibl.* * Zutreffendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst Seiten Gruppenarbeit*

Bearbeitete Aufgaben Aufgabe 1* Aufgabe 2* Aufgabe 3* Aufgabe 4*

Selbstständigkeitserklärung: Ich versichere, dass ich alle beigefügten Lösungen selbstständig gefunden und ausgearbeitet habe.

Datum Unterschrift

Anschrift der Schule:

Name

Straße / Nr.

PLZ / Ort Bundesland



EDV-Coupon 2006

ABSENDER:

Name Vorname geb. am

Straße / Nr. PLZ / Ort

Tel. Bundesland

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe Männl.* Weibl.* * Zutreffendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst Seiten Gruppenarbeit*

Bearbeitete Aufgaben Aufgabe 1* Aufgabe 2* Aufgabe 3* Aufgabe 4*

Anschrift der Schule:

Name

Straße / Nr.

PLZ / Ort Bundesland

Teilnahmebedingungen und wichtige Hinweise auf der Rückseite beachten!

Teilnahmebedingungen im Überblick

• An der **1. Runde** des Bundeswettbewerbs Mathematik können sich Schüler/innen an Schulen in der Bundesrepublik Deutschland und deutschen Auslandsschulen, die zur allgemeinen Hochschulreife führen, beteiligen. Es sind Einzel- und Gruppenarbeiten zugelassen, die die Lösung zu mindestens einer der vier Aufgaben enthalten müssen. **Gruppenarbeiten** durchlaufen das Korrekturverfahren allerdings außer Konkurrenz und werden nicht mit Preisen versehen. Sie können deshalb auch nicht zur Teilnahme an den weiteren Wettbewerbsrunden berechtigen. Wie alle anderen Teilnehmer/innen erhalten jedoch auch die Gruppen Lösungsbeispiele zu den Aufgaben und eine Mitteilung über die Einstufung ihrer Arbeit. Ein **Preis** wird in dieser Runde vergeben, wenn mindestens drei der vier Aufgaben richtig gelöst wurden. Wenn Sie eine Einzelarbeit einreichen, muss die auf dem Teilnahmecoupon abgedruckte **Selbstständigkeitserklärung** unterschrieben sein. Die Selbstständigkeitsverpflichtung bezieht sich dabei bereits auf die Phase der Lösungsfindung und nicht erst auf die endgültige Formulierung. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen diese Verpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.

- Für die **2. Runde** sind alle Preisträger/innen der 1. Runde teilnahmeberechtigt. Es sind in dieser Runde nur Einzelarbeiten zugelassen, die Lösungen zu mindestens drei der vier Aufgaben enthalten.
- Für die **3. Runde** haben sich die 1. Preisträger/innen der 2. Runde qualifiziert.
- Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterentscheidung“). Der Rechtsweg ist in allen drei Runden ausgeschlossen.

Wichtige Hinweise

- Bei der Darstellung der Lösung müssen alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet werden. Dabei kommt es entscheidend auf die logische Vollständigkeit an. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzen von Umformungsschritten möglich sein. Bitte geben Sie benutzte Hilfsmittel (Literatur etc.) an. Umständliche und unnötig breite Ausführungen sowie Beweise und Überlegungen, die zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht erforderlich sind, wirken sich negativ auf die Bewertung aus. Dies gilt auch für unverlangte Verallgemeinerungen, sofern sie zu einem erheblichen Mehraufwand in der Darstellung führen oder unangemessen anspruchsvolle mathematische Hilfsmittel benötigen. Derartige Ausführungen können allenfalls, ebenso wie Alternativlösungen, in einem Anhang, der keinen Einfluss auf die Bewertung hat, der Arbeit beigelegt werden.

Schwer lesbare Arbeiten können von der Bewertung ausgeschlossen werden. Es sollte auch vermieden werden, mathematische oder logische Symbole unnötig zu häufen, wenn dadurch die Lesbarkeit der Arbeit wesentlich eingeschränkt wird.

- Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.
- Schreiben Sie die Lösungen bitte gut lesbar und ohne Verwendung der Farben Rot und Grün (diese sind für die Korrektur reserviert) auf Blätter des For-

mats DIN A4 und lassen Sie links einen 6 cm breiten Rand frei. Ihre Lösungen sollten nach Möglichkeit maschinengeschrieben sein. Bitte nummerieren Sie alle Blätter durch und versehen sie oben rechts mit Ihrem Namen. Alle Blätter sollen nur einseitig beschrieben werden. Senden Sie die Arbeit in einem Briefumschlag des Formats DIN C4, auf dessen Rückseite oben links (Verschluss rechts) der vollständig ausgefüllte Teilnahmecoupon aufgeklebt ist, an die unten angegebene Adresse. Den EDV-Coupon bitte ausgefüllt in den Umschlag legen. Gruppen geben auf dem Umschlag bitte die Namen aller Gruppenmitglieder und auf dem Coupon einen Ansprechpartner/-partnerin an.

- Die eingereichten Arbeiten gehen in das Eigentum des Wettbewerbs über und werden nicht zurückgesandt. Es wird deshalb empfohlen, eine Kopie zu behalten. Diese kann bei Unklarheiten zusammen mit den Lösungsbeispielen mit dem Fachlehrer/der Fachlehrerin durchgesehen werden.
- Einsendeschluss für die 1. Runde ist der 1. März 2006 (Datum des Poststempels). Verspätet abgesandte Arbeiten können nicht in das Korrekturverfahren einbezogen werden. Einsendungen auf elektronischem Wege sind nicht möglich. Über das Ergebnis werden alle Teilnehmer/innen im Juni 2006 informiert. Wer wissen möchte, ob seine Einsendung angekommen ist, kann eine frankierte und an ihn selbst adressierte Postkarte mitschicken. Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

**Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum
Postfach 20 14 48
53144 Bonn**

Lösungsbeispiel

Aufgabe 3 der 1. Runde 2005

Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Lösung von Michael Holl

Es gelten folgende Beziehungen:

$$3\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad (\text{laut Aufgabenstellung})$$

$$\Leftrightarrow \beta = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha \quad (1)$$

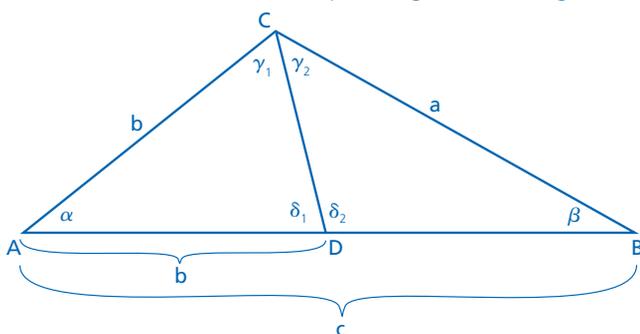
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (\text{Innenwinkelsumme}) \quad (2)$$

Daraus folgt: $2\alpha + \beta = \gamma$

$$\Leftrightarrow \gamma = 2\alpha + 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha \quad (\text{wegen (1)})$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha \quad (3)$$

Damit ist das Dreieck ABC stumpfwinklig und c die längste Seite.



Michael Holl, Klasse 13,
Gymnasium Dionysianum,
Rheine

D liege auf der Strecke AB und habe den Abstand b zu a . (4)

Aus (4) folgt: $\gamma_1 = \delta_1$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

Aus $\alpha + \gamma_1 + \delta_1 = 180^\circ$ (Innenwinkelsumme) folgt deshalb:

$$\gamma_1 = \delta_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

Daraus ergibt sich $\delta_2 = 180^\circ - \delta_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha = \gamma$ (wegen (3)) (5)

Aus (1) bis (5) folgt: Die Dreiecke ABC und CBD sind ähnlich (Es reichen zwei gleiche Winkel). Daraus folgt:

$$\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \frac{a}{c-b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c(c-b) \Leftrightarrow a^2 + bc = c^2$$

q.e.d.

Übungsmaterial

Die Aufgaben und Lösungsbeispiele aus früheren Wettbewerbsläufen können kostenlos gegen Einsendung eines adressierten und ausreichend frankierten Umschlags (DIN C4) von der Geschäftsstelle bezogen werden.

So sind wir erreichbar:

Bundeswettbewerb Mathematik, Postfach 20 14 48, 53144 Bonn,
Tel.: (02 28) 9 59 15 - 20,

E-Mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de,

Web: www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg

